SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2002-2003

Bruno Franchi

SOTTOVARIETÀ REGOLARI DEL GRUPPO DI HEISENBERG

10 febbraio 2003

Tecnoprint - Bologna 2005

Riassunto. Lo scopo di questo seminario è quello di presentare alcuni problemi sulla geometria dei gruppi di Heisenberg $\mathbb{H}^n$ e di descrivere le ricerche in corso in collaborazione con Raul Serapioni e Francesco. Serra Cassano.

Abstract. In this seminar we describe some problems concerning the geometry of Heisenberg groups $\mathbb{H}^n$ and related researches in collaboration with Raul Serapioni and Francesco. Serra Cassano.

Denotiamo con $\mathbb{H}^n$ il gruppo di Heisenberg $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{2n+1}$, dove i punti sono indicati con $P = [z,t] = [x+iy,t] \simeq (p_1,\dots,p_{2n+1})$ e la legge di moltiplicazione è definita nel modo seguente: se $Q = [\zeta,\tau]$ è un altro punto di $\mathbb{H}^n$, allora $P \cdot Q = [z+\zeta, t+\tau+2\Im m(z\cdot\bar{\zeta})]$, e, se $\lambda \in \mathbb{R}$, possiamo definire una famiglia di dilatazioni non-isotrope ponendo $\lambda \circ [z,t] = [\lambda z, \lambda^2 t]$. Inoltre poniamo $\|P\|_\infty := \max\{|z|, |t|^{1/2}\}$ e $d(P,Q) := \|P^{-1}\cdot Q\|_\infty$; sottolineiamo esplicitamente che d è una distanza su $\mathbb{H}^n$, equivalente alla distanza di Carnot-Carathéodory. Nel seguito $U(P,r)$ denoterà la sfera aperta di centro P e raggio r rispetto alla distanza d. Infine indichiamo con X_i e Y_i, $i = 1,\dots,n$, i campi invarianti a sinistra sul gruppo definiti da $X_i = \partial_{x_i} + 2y_i\partial_t$ e $Y_i = \partial_{y_i} - 2x_i\partial_t$; identificheremo sistematicamente i campi vettoriali e gli operatori differenziali del primo ordine associati. I campi vettoriali $X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n$ definiscono canonicamente un fibrato (fibrato orizzontale $H\mathbb{H}$) su $\mathbb{H}^n$ la cui fibra in ogni punto P è lo spazio lineare $L_0(P)$ di dimensione $2n$ generato dai campi vettoriali nel punto P. Lo spazio $L_0(P)$ sarà dotato di un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ e di una norma $|\cdot|_P$ tali che la base $X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n$ sia ortonormale. Identificheremo dunque ogni sezione regolare φ di $H\mathbb{H}$ con le sue coordinate relative a questa base; così φ sarà identificata a una funzione $(\varphi_1\dots\varphi_{2n}) : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{2n}$.

Così possiamo definire la $\mathbb{H}$-divergenza di una sezione orizzontale φ come

$$\operatorname{div}_{\mathbb{H}}\varphi = \sum_{j=1}^{n}(X_j\varphi_j + Y_j\varphi_{n+j}).$$

Analogamente, se f è una funzione a valori reali definita in un aperto di $\mathbb{H}^n$, il suo $\mathbb{H}$-gradiente è la sezione di $H\mathbb{H}$ definita da $\nabla_{\mathbb{H}} f = (X_1 f,\dots,X_n f, Y_1 f,\dots,Y_n f)$. Infine, indichiamo con T il campo vettoriale $T = \partial_t$.

Per finire, per quanto non è definito esplicitamente in questa nota, come pure per l'interesse dello studio del gruppo di Heisenberg, rimandiamo [18]; qui ci limitiamo ad osservare che il nostro interesse verso il gruppo di Heisenberg è essenzialmente di origine geometrica, poichè $\mathbb{H}^n$ è il più semplice esempio d'una struttura metrica sufficientemente ricca che non è euclidea neppure a livello locale (per questi aspetti di geometria intrinseca rimandiamo ad esempio a [14], [4] e [7]). Sottolineiamo qui esplicitamente che la dimensione di Hausdorff intrinseca (dimensione omogenea) di $\mathbb{H}^n$ come spazio metrico è $Q = 2n+2$.

Ricordiamo inoltre che in $\mathbb{H}^n$ c'è una definizione naturale di spazio $BV_{\mathbb{H}}$ e dunque di perimetro, definizioni che vogliamo richiamare (in effetti, ci sono parecchie definizioni possibili che si può dimostrare essere equivalenti: si vedano, ad esempio, [5], [13] e [9]).

Definizione 0.1. Diremo che un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{H}^n$ ha $\mathbb{H}$-perimetro finito in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$ se

$$|\partial E|_{\mathbb{H}}(\Omega) := \sup\{\int_E \operatorname{div}_{\mathbb{H}}\varphi dP \le 1\} < \infty,$$

dove $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ è una sezione regolare del fibrato orizzontale supportata in Ω.

Se ∂E è una varietà regolare di codimensione 1 con normale unitaria esterna n, risulta

$$|\partial E|_{\mathbb{H}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\langle X_j, n\rangle^2 + \langle Y_j, n\rangle^2\right)^{1/2} \mathcal{H}^{2n}\llcorner\partial E, \tag{1}$$

dove $\mathcal{H}^s$ denota la misura di Hausdorff s-dimensionale, si vedano [6] and [9].

Consideriamo dapprima il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H} := \mathbb{H}^1$. Il problema che ci si pone è il seguente:

Quali sono le sottovarietà naturali di $\mathbb{H}$?

Chiaramente una risposta a questa domanda richiede una buona nozione di "naturale". Una prima scelta ovvia potrebbe essere quella di osservare che $\mathbb{H}$ identificato con $\mathbb{R}^3$ è una varietà euclidea tridimensionale e le sue sottovarietà naturali sono quelle in senso Riemanniano. Purtroppo però questa definizione non è "naturale" in senso intrinseco: ad esempio, ogni semento dell'asse $\{t = 0\}$ ha lunghezza infinita rispetto alla metrica di Carnot–Carathéodory, e questo non è "naturale" per una sottovariet'a di dimensione 1, e, analogamente, un aperto limitato di $\mathbb{H}$ ha misura di Hausdorff 3-dimensionale intrinseca infinita.

Il problema può allora essere riformulato nel modo seguente:

È possibile dare una nozione di varietà k-dimensionale in $\mathbb{H}$
in modo che le varietà abbiano dimensione di Hausdorff intrinseca "naturale"?

Vedremo subito che è possibile dare una risposta a questa problema, ma che la risposta genere un nuovo problema.

Una prima possibile risposta è la seguente: se la nostra nozione di "naturale" deve essere connessa alla metrica intrinseca di Carnot–Carathéodory, allora è "naturale" guardare a $\mathbb{H}$ come spazio metrico e invocare la nozione di varietà in uno spazio metrico introdotta da Federer di sottoinsieme m-rettificabile in uno spazio metrico ([8], 3.2.14): se (X, d) è uno spazio metrico, $E \subset X$ si dice m-rettificabile se esiste una funzione Lipschitz (rispetto a d) da un aperto limitato di $\mathbb{R}^m$ su E. Questa potrebbe essere assunta come definizione di varietà Lipschitz in $\mathbb{H}^n$ (in un gruppo di Carnot generale). Questa scelta puoò essere sostenuta dal risultato seguente:

Proposizione 0.2. *Una curva continua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}^n$ ha misura di Hausdorff 1-dimensionale intrinseca (= lunghezza) finita se e solo se γ è Lipschitz. In particolare, questo implica che γ è orizzontale.*

Quindi questa definizione è coerente: definita in questo modo una varietà Lipschitz di dimensione 1, questa ha dimensione di Hausdorff intrinseca 1. Sfortunatamente però la definizione non è più applicabile quando la dimensione sale. Il seguente risultato è stato provato da Ambrosio & Kirchheim ([1]).

Proposizione 0.3. *Il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}$ è k-puramente non rettificabile per $k \geq 2$, cioè per ogni funzione Lipschitz $f : A \to \mathbb{H}$ dove $A \subset \mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, la misura di Hausdorff k-dimensionale intrinseca di $f(A)$ è zero.*

Una alternativa alla definizione di Federer in dimensione alta (più precisamente in codimensione 1 in $\mathbb{H}^n$, ma lo stesso argomento si applica in codimensione 1 in ogni gruppo di Carnot) è quella proposta in [10], [11].

Richiamiamo preliminarmente il risultato seguente ([16]) per una funzione reale f definita in un aperto $\Omega \subset \mathbb{H}^n$:

Teorema 0.4. *Diciamo che $f \in C^1_{\mathbb{H}}(\Omega)$ se f, $X_i f$, $Y_i f$ sono continue in Ω per $i = 1, \ldots, n$. Se allora $f \in C^1_{\mathbb{H}}(\Omega)$ si ha*

$$f(Q) = f(P) + \sum_{j=1}^{n} X_j f(P)(P^{-1} \cdot Q)_j + \sum_{j=1}^{n} Y_j f(P)(P^{-1} \cdot Q)_{j+n} + o(d(P,Q))$$

per $Q \to P$, uniformemente sulle parti compatte di Ω (per una discussione approfondita sulla differenziabilità in $\mathbb{H}^n$, rimandiamo a [16]).

Possiamo ora dare la definizione seguente.

Definizione 0.5. Se $S \subset \mathbb{H}^n$, diciamo che S è una ipersuperficie $C^1_{\mathbb{H}}$ se per ogni $P \in S$ esistono $r > 0$ e una funzione $f \in C^1_{\mathbb{H}}(U(P,r))$ tali che

i) $S \cap U(P,r) = \{Q \in U(P,r); f(Q) = 0\}$;
ii) $(X_1 f(P), \ldots, X_n f(P), Y_1 f(P), \ldots, Y_n f(P)) \neq 0$.

La condizione ii) ci garantisce che il 'piano tangente' $T_{\mathbb{H}}S(P)$ a S nel punto P definito da $T_{\mathbb{H}}S(P) = \{Q; \sum_{j=1}^{n} X_j f(P) Q_j + \sum_{j=1}^{n} Y_j f(P) Q_{j+n} = 0\}$ è un laterale di un sottogruppo proprio di $\mathbb{H}^n$. Inoltre, questa definizione è giustificata dalla validità d'un 'teorema di Dini' intrinseco. Per semplificare le notazioni, limitiamoci a formularlo nel caso $n = 1$.

Teorema 0.6. *Se $0 \in S = \{f(P) = 0\}$ è una ipersuperficie $C^1_{\mathbb{H}}$ e $X_1 f(0) > 0$, allora esiste $\psi : I_\delta := [-\delta, \delta] \times [-\delta^2, \delta^2] \to \mathbb{H}^1$, ψ continua, e un intorno $\mathcal{U}$ di 0 in $\mathbb{H}^1$ tali che*

i) $S \cap \bar{\mathcal{U}} = \{x = \psi(\eta, \tau), y = \eta, t = 2\psi(\eta, \tau)\eta + \tau, (\eta, \tau) \in I_\delta\}$;

ii)
$$|\partial\{f > 0\}|_{\mathbb{H}}(\mathcal{U}) = \int_{I_\delta} \frac{\sqrt{(X_1 f)^2 + (Y_1 f)^2}}{(X_1 f)} (\psi, \eta, 2\psi\eta + \tau)\, d\eta d\tau;$$

iii) $\nu_{\{f>0\}} = (X_1 f, Y_1 f)/\sqrt{(X_1 f)^2 + (Y_1 f)^2}$ *sur* $S \cap \mathcal{U}$;

Come conseguenza del Teorema 0.6 si può provare il seguente risultato ([11]).

Corollario 0.7. *Se S è una ipersuperficie $C^1_{\mathbb{H}}$, la dimensione di Hausdorff intrinseca di S rispetto alla distanza di Carnot-Carathéodory è $Q - 1$. Inoltre, se $\mathcal{S}^s_d$ denota la misura di Hausdorff intrinseca di dimensione $s \geq 0$ rispetto alla distanza di Carnot-Carathéodory, risulta*

$$|\partial E|_{\mathbb{H}} = \mathcal{S}^{Q-1}_d \llcorner S. \tag{2}$$

Questo ci dice che la definizione è ragionevole: un aperto di $\mathbb{H}$ ha dimensione di Hausdorff intrinseca Q, una ipersuperficie $C^1_{\mathbb{H}}$ di codimensione 1 ha dimensione di Hausdorff intrinseca $Q - 1$.

Alcuni commenti: che relazione c'e' tra la nozione di varietà C^1 Euclidea e quella di ipersuperficie $C^1_{\mathbb{H}}$ di codimensione 1 in $\mathbb{H}$? Chiaramente, una varietà C^1 Euclidea S che non ha punti caratteristici è una ipersuperficie $C^1_{\mathbb{H}}$ di codimensione 1 in $\mathbb{H}$, se definiamo come insieme $C(S)$ dei punti caratteristici di S l'insieme dei punti P in cui il piano tangente Euclideo coincide con la fibra orizzontale in P. Il viceversa è falso: esistono ipersuperficie $C^1_{\mathbb{H}}$ di codimensione 1 in $\mathbb{H}$ che hanno dimensione euclidea $\frac{5}{2}$ (Kirchheim & Serra Cassano [15]). D'altra parte, un risultato di Z. Balogh ([3]) prova che, se S è una varietà C^1 Euclidea, la misura di Hausdorff intrinseca $Q - 1$-dimensionale di $C(S)$ è zero, e quindi S ha dimensione di Hausdorff intrinseca $Q - 1$ (ma ha dimensione topologica $2n = Q - 2$, per il Teorema 0.6).

Da questi risultati si potrebbe formulare il seguente quadro.

i) *Le varietà intrinsiche di dimensione bassa sono immagine Lipschitz di aperti Euclidei, mentre quelle di dimensione alta sono luoghi di zeri di funzioni regolari in senso intrinseco;*

ii) *Le varietà intrinsiche di dimensione bassa hanno dimensione di Hausdorff intrinseca uguale alla dimensione topologica, mentre per quelle di dimensione alta la dimensione di Hausdorff intrinseca eccede di uno la dimensione topologica.*

Si pongono allora in modo naturale i problemi seguenti.

iii) *Dare una una spiegazione non puramente descrittiva del fenomeno descritto nel punto i) sopra. In particolare, si può dare un significato preciso alle parole "bassa" e "alta"? Si può spiegare il salto che a un certo punto si verifica tra la dimensione metrica e quella topologica?*

iv) *Si può dare una definizione di varietà intrinseca di dimensione intermedia tra 1 e $Q - 1$? Esiste un modo per esprimere la misura di Hausdorff intrinseca della giusta dimensione su queste varietàcome nel Corollario 0.7?*

Una risposta alle domande iii) e iv) può venire dalle considerazioni seguenti, legate al *complesso di Rumin.* È stato Martin Reimann che ha attirato la nostra attenzione verso questo risultato, rispondendo a una domanda che gli avevo posto a seguito di un risultato ottenuto in

collaborazione con Maria Carla Tesi e Nicoletta Tchou ([12]) in cui si prova l'esitenza in $\mathbb{H}^1$ di un operatore differenziale del secondo ordine $\mathrm{curl}_{\mathbb{H}}$ che muta sezioni orizzontali in sezioni orizzontali e che funge da rotore del gruppo di Heisenberg, è tale cioè che se, ad esempio in un aperto semplicemente connesso, $\mathrm{curl}_{\mathbb{H}} F = 0$, allora esiste una funzione a valori reali f tale che $F = \nabla_{\mathbb{H}} f$.

Per definire il complesso di Rumin occorrono alcune definizioni preliminari. Illustreremo il risultato in $\mathbb{H}^n$, anche la teoria è sviluppata in una varietà di contatto. Sia M un aperto di $\mathbb{H}^n \equiv \mathbb{R}^{2n+1}$, e sia ϑ la 1-forma di contatto canonica su $\mathbb{H}^n$, sia cioè

$$\vartheta = dt + 2\sum_j (x_j dy_j - y_j dx_j).$$

Risulta $\vartheta(X_j) = \vartheta(Y_j) = 0$ e $\vartheta(T) = 1$, cioè ϑ si annulla esattamente sul fibrato orizzontale. e $\vartheta \wedge d\vartheta \neq 0$. Inoltre $\{dx_1, \ldots, dx_n, dy_1, \ldots, dy_n, \vartheta\}$ è una base di $(\mathbb{R}^n)^*$, duale della base $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, T\}$. A volte per semplicità di scrittura porremo $\xi_j = dx_j$ per $j = 1, \ldots, n$, $\xi_j = dy_{j-n}$ per $j = n+1, \ldots, 2n$, e $\xi_{2n+1} = \vartheta$.

Indichiamo con Ω_k l'insieme delle k-forme differenziali su M, con I_k l'ideale generato da ϑ, cioè

$$I_k = \{\alpha \in \Omega_k \,:\, \alpha = \vartheta \wedge \beta + d\vartheta \wedge \gamma\},$$

e con J_k l'annullatore di I_k, cioè

$$J_k = \{\alpha \in \Omega_k \,:\, \vartheta \wedge \alpha = d\vartheta \wedge \alpha = 0\}.$$

Indichiamo con d_Q l'operatore da $\frac{\Omega_k}{I_k}$ a $\frac{\Omega_{k+1}}{I_{k+1}}$ indotto dall'operatore di differenziazione, e sempre con dQ l'operatore da J_k a J_{k+1}. Allora vale il risultato seguente ([17])

Teorema 0.8. *Esiste un operatore differenziale del secondo ordine*

$$D : \frac{\Omega_n}{I_k} \to J_{n+1}$$

tale che il complesso

$$\begin{aligned} 0 \to \mathbb{R} \to C^\infty \xrightarrow{d_Q} \frac{\Omega_1}{I_1} \xrightarrow{d_Q} \cdots \xrightarrow{d_Q} \frac{\Omega_n}{I_n} \cdots \xrightarrow{D} J_{n+1} \\ \cdots \xrightarrow{d_Q} J_{n+2} \xrightarrow{d_Q} \cdots \xrightarrow{d_Q} J_{2n+1} \to 0 \end{aligned} \tag{3}$$

è una risoluzione delle costanti. Inoltre la coomologia di questo complesso coincide con quella del complesso di De Rham.

L'idea è che questo complesso sia il complesso "naturale" per il gruppo di Heisenberg (incidentalmente, l'operatore D qui sopra nel caso $n = 1$ è – modulo identificazioni standard – l'operatore $\mathrm{curl}_{\mathbb{H}}$ di [12]).

Poichè al complesso di De Rahm si associano naturalmente le correnti euclidee, il teorema precedente suggerisce una definizione di corrente intrinseca in $\mathbb{H}^n$ come segue.

Definizione 0.9. Sia $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}^n$ un aperto. Una corrente k-dimensionale in $\mathbb{H}^n$, $1 \leq k \leq 2n+1$ è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{D}^{k,\mathbb{H}}(\mathcal{U}) := \frac{\Omega_k}{I_k}$ se $1 \leq k \leq n$, e su $\mathcal{D}^{k,\mathbb{H}}(\mathcal{U}) := J_k$ se $n \leq k \leq 2n+1$ (la continuità va intesa rispetto alla convergenza dei coefficienti delle forme nella topologia di $\mathcal{D}$). Se T è una corrente k-dimensionale di $\mathbb{H}^n$ in un aperto $\mathcal{U}$, scriveremo $T \in \mathcal{D}_{k,\mathbb{H}}(\mathcal{U})$.

Poichè nel caso euclideo l'esempio tipico di corrente è quello di corrente associata a una k-varietà, ecco che la struttura del complesso di Rumin può dare una spiegazione dei fenomeni descritti sopra in $\mathbb{H}^n$: poichè le correnti di dimensione $k \leq n$ sono funzionali su spazi quoziente, esse sono un sottoinsieme proprio delle correnti euclidee, dovendosi annullare su I_k, e questo, letto in termini di varietà, significa che varietà k-dimensionali intrinseche saranno un sottoinsieme

delle varietà k-dimensionali euclidee, dovendo verificare una condizione di orizzontalità rispetto a $H\mathbb{H}$. Invece tutte le correnti euclidee per $k \geq n+1$ sono correnti di $\mathbb{H}^n$ ma vi possono essere oggetti che non sono euclidei, così le varietà k-dimensionali intrinseche per $k \geq n+1$ saranno oggetti più generali delle corrispondenti varietà euclidee.

Consideriamo alcuni esempi. Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}^n$ una curva assolutamente continua orientata, e sia t un orientamento di γ (un 1-vettore tangente unitario continuo). Ci chiediamo quando questa generi una corrente su $\frac{\Omega_1}{I_1}$ tramite la formula canonica

$$\omega \to \int_\gamma \langle \omega, t \rangle.$$

Poichè $I_1 = \{\beta\vartheta : \beta \in \mathcal{D}\}$, dovrà essere $\langle \vartheta, t \rangle \equiv 0$, cioè γ dovrà essere una curva orizzontale. Questo si estende a k-varietà euclidee per $k \leq n$, che genereranno una corrente intrinseca se sono orizzontali, se cioè hanno un campo di k-vettori tangenti orizzontali.

Osserviamo che l'esistenza di k-varietà orizzontali non contraddice il teorema di Frobenius perchè esistono sottofibrati involutivi di $H\mathbb{H}$ di dimensione minore o uguale a n che ammettono quindi varietà integrali di dimensione uguale: basta prendere $X_{i_1}, \ldots, X_{i_\ell}, Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_m}$ con $\ell + m = k$, $\{i_1, \ldots, i_\ell\} \cap \{j_1, \ldots, j_m\} = \emptyset$.

Si può dimostrare inoltre che le correnti intrinseche di $\mathbb{H}^n$ definite in questo modo coincidono con le correnti su $\mathbb{H}^n$ inteso come spazio metrico nel senso di Ambrosio & Kirchheim ([2]) se $k \leq n$.

Le definizioni seguenti sono ora ovvie.

Definizione 0.10. Se $T \in \mathcal{D}_{k,\mathbb{H}}(\mathcal{U})$, scriveremo

$$M_{\mathcal{U}}(T) = \sup_{\omega \in \mathcal{D}^{k,\mathbb{H}}(\mathcal{U}), |\omega \leq 1} T(\omega).$$

Definizione 0.11. Se $T \in \mathcal{D}_{k,\mathbb{H}}(\mathcal{U})$, podiamo

$$\partial T(\omega) := T(d_Q \omega) \text{ se } k \neq n$$

e

$$\partial T(\omega) := T(D\omega) \text{ se } k = n.$$

Definizione 0.12. Se $T \in \mathcal{D}_{k,\mathbb{H}}(\mathcal{U})$, diremo che T è intera se

$$M_{\mathcal{U}}(T) + M_{\mathcal{U}}(\partial T) < \infty.$$

Proposizione 0.13. *Sia U un aperto di $\mathbb{H}^n$ e sia $E \subset \mathbb{H}^n$ un insieme misurabile. Consideriamo la corrente T_E su U definita da*

$$\int_E \omega d\mathcal{L}^{2n+1},$$

dove $\mathcal{L}^{2n+1}$ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^{2n+1} \equiv \mathbb{N}^n$ (ricordiamo che $J_{2n+1}(U) = \Omega_{2n+1} = \mathcal{D}(U)\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_{2n+1}$). Supponiamo per semplicità $\mathcal{L}^{2n+1}(E) < \infty$.

Allora T_E è intera se e solo se E ha $\mathbb{H}$-perimetro finito in U nel senso di [10] *e inoltre*

$$M_U(\partial T) = |\partial E|_{\mathbb{H}}(U).$$

Proof. Se $\omega \in \mathcal{D}^{2n,\mathbb{H}} = I_{2k}$, poichè $\omega \in \Omega_{2n}$, risulta

$$\omega = \sum_{j=1}^{2n+1} \omega_j \widehat{\xi_j},$$

□

dove $\widehat{\xi_j}$ è il prodotto esterno di tutti gli ξ_k con $k \neq j$, ordinati in ordine crescente di indice. La condizione $\omega \wedge d\vartheta = 0$ è automaticamente soddisfatta, mentre la condizione $\omega \wedge \vartheta = 0$ implica che $\omega_{2n+1} = 0$, così che

$$\langle \partial T_E, \omega \rangle = \langle T_E, \sum_{j=1}^{2n+1} d\omega_j \wedge \widehat{\xi_j} \rangle.$$

Osserviamo ora che, se $f \in \mathcal{D}'$,

$$df = \sum_k X_j f dx_j + \sum_k Y_j f dy_j + T f \vartheta,$$

e quindi

$$\langle \partial T_E, \omega \rangle = \langle T_E, \sum_{j=1}^{2n+1} (-1)^{j-1} (X_j \omega_j) \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_{2n+1} \rangle = \int_E \operatorname{div}_{\mathbb{H}}(\tilde{\omega}) d\mathcal{L}^{2n+1},$$

dove $\tilde{\omega} = (\omega_1, -\omega_2, \ldots, -\omega_{2n})$.

Osservazione 0.14. Osserviamo che la sezione orizzontale $\tilde{\omega}$ non è un oggetto artificiale, ma può scriversi nella forma

$$\tilde{\omega} = *(^\natural \omega),$$

dove $*$ denota la dualità di Hodge, e $\natural$ indica la dualità tra k-forme e campi di k-vettori.

Osservazione 0.15. Sia S una $2n$-varietà euclidea di classe C^1. In particolare S genera una corrente $T_S \in \mathcal{D}_{2n,\mathbb{H}}$ con la formula

$$\omega \to \int_S \langle \omega, t \rangle d\mathcal{H}^{2n},$$

dove t è un campo di $2n$-vettori tangenti. Vogliamo mostrare che la massa di T_S in senso intrinseco coincide con il perimetro dato dalla formula (1). Per prima cosa dobbiamo ricordare che non tutte le $2n$-forme ω sono ammissibili, ma solo quelle per cui $\omega \wedge \vartheta = 0$, cioè solo quelle della forma

$$\omega = \sum_{j=1}^{2n} \omega_j \widehat{\xi_j};$$

inoltre, se vogliamo far comparire quantità euclidee, dobbiamo trasformare questa espressione in termini euclidei. Se ad esempio $1 \leq j \leq n$, risulta

$$\begin{aligned} \widehat{\xi_j} &= dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \wedge dt \\ &+ (-1)^{2n-j+1} 2 y_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n. \end{aligned}$$

Poichè $*t = n$, la massa di T_S può essere scritta nella forma duale

$$\sup_{|\omega| \leq 1} \int_S \sum_{j=1}^{2n} \omega_j (-1)^{j-1} \langle X_j, n \rangle d\mathcal{H}^{2n},$$

riottenendo (1).

References

[1] L.Ambrosio & B.Kirchheim, *Rectifiable sets in metric and Banach spaces*, Math. Ann. **318**, (2000), 527-555.

[2] L.Ambrosio & B.Kirchheim, *Currents in metric spaces*, Acta Math. **185**, (2000), 1-80.

[3] Z.Balogh, *Size of characteristic sets and functions with prescribed gradient*, Preprint, (2000).

[4] A.Bellaïche, *The tangent space in subriemannian geometry*, in *Subriemannian Geometry*, Progress in Mathematics, **144**. ed. by A.Bellaiche and J.Risler, Birkhauser Verlag, Basel, (1996).

[5] M.Biroli & U.Mosco, *Sobolev and isoperimetric inequalities for Dirichlet forms on homogeneous spaces*, Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., IX. Ser. Rend. Lincei, Mat. Appl., **6**, (1995), 37–44.
[6] L.Capogna, D.Danielli & N.Garofalo, *The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality*, Comm. Anal. Geom. **12**, (1994), 203–215.
[7] G.David & S.Semmes, *Fractured Fractals and Broken Dreams. Self-Similar Geometry through Metric and Measure*, Oxford University Press, (1997).
[8] H.Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, (1969).
[9] B.Franchi, R.Serapioni & F.Serra Cassano, *Meyers-Serrin type theorems and relaxation of variational integrals depending on vector fields*, Houston Journal of Mathematics, **22**, 4, (1996), 859–889.
[10] B.Franchi, R.Serapioni & F.Serra Cassano, *Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group*, Math. Ann. **321**, (2001), 479–531.
[11] B.Franchi, R.Serapioni & F.Serra Cassano, *Regular hypersurfaces, intrinsic perimeter and implicit function theorem in Carnot groups*, preprint, (2001).
[12] B.Franchi, N.Tchou & M.C.Tesi, in preparazione.
[13] N.Garofalo & D.M.Nhieu, *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Math., **49** (1996), 1081–1144.
[14] M.Gromov, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, in *Subriemannian Geometry*, Progress in Mathematics, **144**. ed. by A.Bellaiche and J.Risler, Birkhauser Verlag, Basel, (1996).
[15] B.Kirchheim & F. Serra Cassano, , preprint (2002).
[16] P.Pansu, *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math., **129**, (1989), 1–60.
[17] M.Rumin, *Formes differentielles sur les varietés de contact*, J. Diff. Geon. **39** (1994), 281–330.
[18] E.M.Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, (1993).